УДК 519.6

Ю.І. Першина[1], О.В. Шилін[1], В.О. Пасічник[2]
[1]Українська інженерно-педагогічна академія, Україна
Україна, 61003, м. Харків, вул. Університетська, 16
[2]Харківська державна академія дизайну та мистецтв, Україна
Україна, 61002, м. Харків, вул. Червонопрапорна, 8

РОЗВ'ЯЗАННЯ 3D ЗАДАЧІ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ ЗА ВІДОМИМИ ТОМОГРАМАМИ НА СИСТЕМІ ДОВІЛЬНИХ ПЛОЩИН

Y.I. Pershyna[1], O.V. Shilin[1], V. O.Pasichnik[2]
[1]Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Ukraine
Ukraine, 63003, c. Kharkov, Universitetskaya street, 16
[2]Kharkiv State Academy of Design and Arts, Ukraine
Ukraine, 63002, c. Kharkov, Chervonopraporna, 8

SOLVING THE PROBLEM OF 3D COMPUTER TOMOGRAPHY FOR THE KNOWN AND ITS SYSTEM OF ARBITRARY TOMOGRAMS ON PLANES

Ю.И.Першина[1], О.В. Шилин[1], В.А. Пасечник[2]
[1]Украинская инженерно-педагогическая академия, Украина
Украина, 61003, г. Харьков, ул. Университетская, 16
[2]Харьковская академия дизайна и искусств, Украина
Украина, 61002, г. Харьков, ул.Червонопрапорна, 8

РЕШЕНИЕ 3D ЗАДАЧИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ ПО ИЗВЕСТНЫМ ТОМОГРАММАМ НА СИСТЕМЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

У статті будується та досліджується метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою поліноміальної інтерфлетації з використанням відомих томограм (слідів), що лежать на системі довільних площин, який є узагальненням методу відновлення тіла за відомими томограмами на системі трьох груп паралельних площин. Сформульовані та доведені теореми про інтерфлетаційні властивості та похибку побудованого оператора.
Ключові слова: комп'ютерна томографія, інтерфлетація, відновлення.

The article is based recovery method and investigated the three-dimensional internal structure of the body using polynomial interflatation using known tomograms (traces) lying on a system of random planes, which is a generalization of the method of restoring the body known tomograms on a system of three groups of parallel planes. Formulated and proved theorems on interfletatsiyni properties and built operator error.
Key words: computer tomography, interflatation, restoration.

В статье строится и исследуется метод восстановления внутренней структуры трехмерного тела с помощью полиномиальной интерфлетации с использованием известных томограмм (следов), лежащих на системе произвольных плоскостей, который является обобщением метода восстановления тела по известным томограммам на системе трех групп параллельных плоскостей. Сформулированы и доказаны теоремы о интерфлетационных свойствах и погрешностях построенного оператора.
Ключевые слова: компьютерная томография, интерфлетация, восстановление.

Вступ

В останній чверті 20-го століття в практиці медичних досліджень, а також при неруйнівному контролі тривимірних об'єктів, при проведенні наукових досліджень у різних галузях науки і техніки тощо, знайшли широке застосування комп'ютерні томографи [1–3], які дозволяють відновлювати внутрішню структуру

тіла не розрізаючи його. При цьому виник новий клас задач – задач відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими його томограмами на декількох площинах.

У роботах [4–5] були побудовані та досліджені оператори поліноміальної та сплайн-інтерфлетації [6] функції трьох змінних за відомими слідами на системі трьох груп площин (у кожній групі площини паралельні), і на основі цих операторів була розв'язана задача тривимірної комп'ютерної томографії, у випадку, коли відомі томограми в системі трьох груп перерізаних площин (паралельна схема сканування). Була доведена висока точність розроблених методів. Відомими є методи розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії за допомогою конусоподібної та спіральної схеми сканування, в яких задані площини не є паралельними [7-9].

Робота присвячена розв'язанню задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на системі довільно розташованих площин. Розроблений в статті метод є узагальненням методів, розроблених авторами в роботах [4-5] та є більш точним, ніж відомі методи авторів [7-9].

Побудова оператора інтерфлетації на системі довільно розміщених площин

Нехай скалярнозначна функція $f(x),\ x=(x_1,x_2,x_3),\ x\in R^3$ описує деяку фізичну характеристику внутрішньої структури (наприклад, щільність, коефіцієнт поглинання тощо). Джерелом інформації про функцію $f(x)$, тобто про внутрішню структуру тривимірного тіла, будемо вважати набір будь – яких N перерізаних площин, а також набір томограм $T_k(\bar{x})$, які лежать на цих площинах, які задаються наступними рівняннями

$$\Pi_k : \omega_k(x) =: \sum_{p=1}^{3} a_{kp}x_p - \gamma_k = 0,\ k=\overline{1,N}\ \ \sqrt{\sum_{p=1}^{3} a_{kp}^2} = 1,$$

Вважаємо, що в одній точці перетинається на більше трьох площини.

Введемо наступні позначення:

1. $\tau_{ik} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix}$ – вектор, направлений вздовж лінії перетину площин $\omega_i = 0,\ \omega_k = 0;$;

2. $M = \{(i,k,l)\,|\,\Pi_i \cap \Pi_k \cap \Pi_l = V_{ikl} = (x_{ikl1}, x_{ikl2}, x_{ikl3}) \neq \emptyset,\ i \neq k \neq l\}$, де V_{ikl} – точка перетину трьох площин; M - множина точок перетину;

3. $\Gamma_{ik} = \Pi_i \cap \Pi_k \neq \emptyset,$ – ребра, за якими перетинаються дві площини, на яких лежать відповідні томограми;

4. $\Delta_{ikl} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} \end{vmatrix}$ – визначник, складений із коефіцієнтів рівняння заданих площин;

5. $\mathrm{T}_k(\overline{x})$ –томограма, яка лежить на площині Π_k.

Визначення 1 [4]. Томограмою $T_k(\overline{x})$ (слідом функції $f(x)$ на площині $\omega_k(x)=0$ за умови, що коефіцієнти $a_{ki}, i=\overline{1,3}$ не дорівнюють нулю, будемо називати одну з трьох функцій

$$T_k(\overline{x})=\begin{cases} f(x_{1k}(x_2,x_3),x_2,x_3) \\ f(x_1,x_{2k}(x_1,x_3),x_3) \\ f(x_1,x_2,x_{3k}(x_1,x_2)) \end{cases} = \begin{cases} f((\gamma_k-a_{k2}x_2-a_{k3}x_3)/a_{k1},x_2,x_3),\ a_{k1}\neq 0 \\ f(x_1,(\gamma_k-a_{k1}x_1-a_{k3}x_3)/a_{k2},x_3),\ a_{k2}\neq 0 \\ f(x_1,x_2,(\gamma_k-a_{k1}x_1-a_{k2}x_2)/a_{k3}),\ a_{k3}\neq 0 \end{cases},$$

$$\overline{x}=\begin{cases} (x_1,x_2), & x_3=0 \\ (x_1,x_3), & x_2=0 \\ (x_2,x_3), & x_1=0 \end{cases}$$

де $x_k=x_{kp}, k=\overline{1,3}$ - вирази, що отримуються розв'язанням рівняння $\omega_k(x)=0$ відносно змінної x_p.

Нехай томограми $\mathrm{T}_i(\overline{x}), \mathrm{T}_k(\overline{x}), \mathrm{T}_l(\overline{x})$ перетинаються в точці V_{ikl}. Позначимо

$$u_{li}^k(x)=V_{ikl}+\frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}}\omega_l(x)+\frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}}\omega_i(x),\ w_i(x)=V_{ikl}+\frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}}\omega_i(x).$$

Теорема 1. Для існування функції $L_{ikl}(x)\in C^r(\Omega)$ із заданими томограмами $\mathrm{T}_{1,i}(\overline{x}), i=\overline{1,n},\ \mathrm{T}_{2,k}(\overline{x}),\ k=\overline{1,m},\ \mathrm{T}_{3,l}(\overline{x}),\ l=\overline{1,s}$, для якої виконуються умови

$$L_{ikl}(x)\big|_{\Pi 1_i}=T_{1,i}(\overline{x})\big|_{\Pi 1_i},\ L_{ikl}(x)\big|_{\Pi 2_k}=T_{2,k}(\overline{x})\big|_{\Pi 2_k},\quad L_{ikl}(x)\big|_{\Pi 3_l}=T_{3,l}(\overline{x})\big|_{\Pi_l},\quad (1)$$

необхідно та достатньо, щоб сліди $T_{q,d}(\overline{x}),\ q=1,2,3,\ d=i,k,l,\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m}$, $l=\overline{1,s}$ задовольняли умові $T_{q,d}(\overline{x})\in C^r(R^2),\ r\geq 0$ та умовам С.М. Нікольського, які на ребрі Γ_{kl} зводяться до перевірки рівностей

$$T_{\ 2,k}(u_{li}^k(x))\big|_{\omega 3_l(x)=0}=T_{\ 3,l}(u_{il}^l(x))\big|_{\omega 2_k(x)=0},$$

тобто, значення томограм на лінії перетину повинні співпадати для всіх томограм, що перетинаються. Аналогічний вигляд мають ці умови на ребрах Γ_{ik}, Γ_{li}.

У точці V_{ikl} умови Нікольського зводяться до перевірки рівностей

$$T_{\ 3,l}(u_{ik}^l(x))\big|_{\omega 1_i(x)=0,\omega 2_k(x)=0}=T_{\ 2,k}(u_{li}^k(x))\big|_{\omega 3_l(x)=0,\omega 1_i(x)=0}=T_{\ 1,i}(u_{kl}^i(x))\big|_{\omega 2_k(x)=0,\omega 3_l(x)=0},$$

тобто, значення томограм у точці перетину повинні співпадати для всіх томограм, що перетинаються.

Доведення. Оператор $L_{ikl}(x)$ побудуємо у вигляді

$$L_{ikl}(x)=L_{ikl}(\{T_{q,d}\},x)=\left[L_{ik}^l+L_{kl}^i+L_{li}^k-L_{li}^kL_{kl}^i-L_{kl}^iL_{li}^l-L_{li}^kL_{ik}^l+L_{ik}^l\ L_{kl}^iL_{li}^k\right](\{T_{q,d}\},x),\ (2)$$

$$L_{ik}^l(\{T_{q,d}\},x)=T_{3,l}(u_{ik}^l(x))=f(u_{ik}^l(x)),$$

$$L_{ik}^{l}L_{kl}^{i}(\{T_{q,d}\};x)=f(w_k(x)).\ \ L_{ik}^{l}L_{kl}^{i}L_{li}^{k}(\{T_{q,d}\};x)=f(V_{ikl}),\ q=1,2,3,\ d=i,k,l.$$

Аналогічно визначаються оператори $L_{kl}^{i}, L_{li}^{k}, L_{kl}^{i}L_{li}^{k},\ L_{li}^{k}L_{ik}^{l}$.

У роботі С.М. Нікольського [10] доведено, що для того, щоб існувала функція $f(x_1,x_2,x_3)\in C^r(\Omega)$, яка має сліди

$$\left.\frac{\partial^{\beta} f(x_1,x_2x_3)}{\partial x_s^{p}}\right|_{x_s=0}=\left.\phi_{s,p}\right|_{x_s=0},s=1,2,3,\ \ p=\overline{0,r},$$

необхідно та достатньо, щоб граничні функції $\phi_{s,p}(\overline{x})$ задовольняли в точці (0,0,0) умовам вигляду

$$\left.\frac{\partial^{\beta}\phi_{s,\alpha}(\overline{x})}{\partial x_p^{\beta}}\right|_{x_p=0}=\left.\frac{\partial^{\alpha}\phi_{s,\beta}(\overline{x})}{\partial x_s^{\alpha}}\right|_{x_s=0},\quad s,p=1,2,3,\ \ \alpha,\beta=\overline{0,r}$$

Цей факт дозволяє будувати оператори $L_{ikl}(x)$ у вигляді (2).

Теорема 1 доведена.

Розповсюдження результатів на випадок більшої кількості площин ніж три проводиться в теоремі 4, завдяки використанню розкладу одиниці.

Теорема 2. Нехай внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією $f(x)\in C^r(\Omega)$ $(r\geq 3)$, яка має томограми $\mathrm{T}_k(\overline{x}),\ k=\overline{1,N}$, задані на площинах Π_k відповідно, та задовольняє умови $f(x)|_{\Pi_s}=T_s(\overline{x})|$. Тоді для похибки $R_{ikl}f(x)=(I-L_{ikl})f(x)$ наближеного відновлення внутрішньої структури $f(x)$ оператором $L_{ikl}(x)$, побудованим за допомогою даного набору площин та томограм, виконується рівність

$$R_{ikl}f(x)=\int_0^{\omega 1_i}\int_0^{\omega 2_k}\int_0^{\omega 3_l}\frac{\partial^3}{\partial t_i\,\partial t_k\,\partial t_l}f\left(V_{ikl}+\frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}}t_i+\frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}}t_k+\frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}}t_l\right)dt_i\,dt_k\,dt_l\ . \tag{3}$$

Доведення. Візьмемо до уваги тотожність

$$(I-L_{ikl})f(x)=(I-L_{ik}^{l}-L_{kl}^{i}-L_{li}^{k}+L_{li}^{k}L_{kl}^{i}+L_{kl}^{i}L_{li}^{k}+L_{li}^{k}L_{ik}^{l}+L_{ik}^{l}L_{kl}^{i}L_{li}^{k})f(x)=$$

$$=\left(I-L_{kl}^{i}\right)\left(I-L_{li}^{k}\right)\left(I-L_{ik}^{l}\right)f(x),$$

а також тотожність типу

$$\left(I-L_{kl}^{i}\right)f(x)=\int_0^{\omega_i(x)}\frac{\partial f}{\partial t_i}\left(V_{ikl}+\frac{\tau_{kl}^{\omega 2,\omega 3}}{\Delta_{kli}}t_i+\frac{\tau_{li}^{\omega 3,\omega 1}}{\Delta_{lik}}\omega_k(x)+\frac{\tau_{ik}^{\omega 1,\omega 2}}{\Delta_{ikl}}\omega_l(x)\right)dt_i.$$

Підставимо цей інтегральний вираз, а також аналогічні вирази для $\left(I-L_{li}^{k}\right)f(x)$, $\left(I-L_{ik}^{l}\right)f(x)$ в попередню формулу

$$R_{ikl}f(x)=\left(I-L_{ikl}\right)f(x)=\left(I-L_{kl}^{i}\right)\left(I-L_{li}^{k}\right)\left(I-L_{ik}^{l}\right)f(x)=$$

$$= \int_0^{\omega 1_i} \int_0^{\omega 2_k} \int_0^{\omega 3_l} \frac{\partial^3}{\partial t_i \, \partial t_k \, \partial t_l} f\left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}^{\omega 2,\omega 3}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}^{\omega 3,\omega 1}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}^{\omega 1,\omega 2}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i \, dt_k \, dt_l .$$

Теорема 2 доведена.

Теорема 3. Нехай множина довільних томограм, які знаходяться на площинах, що задаються рівняннями:

$$\Pi_k : \omega_k(x) = 0, k = \overline{1, N},$$

задовольняє умову: в одній точці $V_{ikl} = \Pi 1_i \cap \Pi 2_k \cap \Pi 3_l$ перетинаються не більше трьох томограм;

Тоді система функцій

$$h_{ikl}(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k,l}}^{N} \omega_j(x)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k,l}}^{N} \omega_j(V_{ikl})}$$

має властивості $h_{ikl}(V_{i'k'l'}) = \delta_{i,i'} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}$, $i,i' = \overline{1,n}$, $k,k' = \overline{1,m}$, $l,l' = \overline{1.s}$. та є розкладом одиниці, тобто $\sum\limits_{\substack{i,k,l \in M \\ i \neq k \neq l}}^{m} h_{ikl}(x) = 1$.

Доведення. Врахуємо, що $V_{i'k'l'} = \Pi 1_{i'} \cap \Pi 2_{k'} \cap \Pi 3_{l'}$, тобто $\omega 1_{i'}(V_{i'k'l'}) = 0$, $\omega 2_{k'}(V_{i'k'l'}) = 0$, $\omega 3_{l'}(V_{i'k'l'}) = 0$.

$$h_{ikl}(V_{i'k'l'}) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \omega 1_j(V_{i'k'l'}) \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \omega 2_k(V_{i'k'l'}) \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{s} \omega 3_j(V_{i'k'l'})}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \omega 1_j(V_{ikl}) \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \omega 2_k(V_{ikl}) \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{s} \omega 3_j(V_{ikl})} = \begin{cases} 1, & i = i', k = k', l = l' \\ 0, & в \;\; інших \;\; випадках \end{cases} =$$

$$= \delta_{i,i'} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}, \; i,i' = \overline{1,m}, \; k,k' = \overline{1,n}, \; l,l' = \overline{1.s}.$$

Теорема 3 доведена.

Лема 1. Нехай томограми $T_{1,i}(\overline{x}), i = \overline{1,n}$, $T_{2,k}(\overline{x})$, $k = \overline{1,m}$, $T_{3,l}(\overline{x})$, $l = \overline{1,s}$ задовольняють умовам теореми 2.9, тоді система функцій $h_{ikl}(x)$ є розкладом одиниці:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k,l}}^{m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,l}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i,k}}^{s} h_{ikl}(x) = 1$$

Доведення. Рівність для $h_{ikl}(x)$ можна записати у вигляді

$$h_{ikl}(x)=\frac{\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq i}}^{n}\omega1_{\Pi1_\mu}(x)\ \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{m}\omega2_{\Pi2_\nu}(x)\ \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq l}}^{s}\omega3_{\Pi3_\beta}(x)}{\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq i}}^{n}\omega1_{\Pi1_\mu}(V_{ikl})\ \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{m}\omega2_{\Pi2_\nu}(V_{ikl})\ \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq l}}^{s}\omega3_{\Pi3_\beta}(V_{ikl})}=$$

$$=\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq i}}^{n}\frac{\omega1_{\Pi1_\mu}(x)}{\omega1_{\Pi1_\mu}(V_{ikl})}\ \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{m}\frac{\omega2_{\Pi2_\nu}(x)}{\omega2_{\Pi2_\nu}(V_{ikl})}\ \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq l}}^{s}\frac{\omega3_{\Pi3_\beta}(x)}{\omega3_{\Pi3_\beta}(V_{ikl})}\quad .$$

Тепер просумуємо цей вираз

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k\neq l}}^{n}\ \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i\neq l}}^{m}\ \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k\neq i}}^{s} h_{ikl}(x)=$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k\neq l}}^{n}\ \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i\neq l}}^{m}\ \sum_{\substack{l=1\\ l\neq i\neq k}}^{s}\left[\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq i}}^{n}\frac{\omega1_{\Pi1_\mu}(x)}{\omega1_{\Pi1_\mu}(V_{ikl})}\ \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{m}\frac{\omega2_{\Pi2_\nu}(x)}{\omega2_{\Pi2_\nu}(V_{ikl})}\ \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq l}}^{s}\frac{\omega3_{\Pi3_\beta}(x)}{\omega3_{\Pi3_\beta}(V_{ikl})}\right]=$$

$$=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k\neq l}}^{n}\left[\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq i}}^{n}\frac{\omega1_{\Pi1_\mu}(x)}{\omega1_{\Pi1_\mu}(V_{ikl})}\right]\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i\neq l}}^{m}\left[\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{m}\frac{\omega2_{\Pi2_\nu}(x)}{\omega2_{\Pi2_\nu}(V_{ikl})}\right]\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k\neq i}}^{s}\left[\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq l}}^{s}\frac{\omega3_{\Pi3_\beta}(x)}{\omega3_{\Pi3_\beta}(V_{ikl})}\right]\equiv 1$$

Тут враховується, що

$$\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq i}}^{n}\frac{\omega1_{\Pi1_\mu}(x)}{\omega1_{\Pi1_\mu}(V_{\mu\nu\beta})},\ \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{m}\frac{\omega2_{\Pi2_\nu}(x)}{\omega2_{\Pi2_\nu}(V_{\mu\nu\beta})},\ \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq;}}^{s}\frac{\omega3_{\Pi3_\beta}(x)}{\omega3_{\Pi3_\beta}(V_{\mu\nu\beta})}$$

є базисними поліномами Лагранжа. З цього виходить, що

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k\neq l}}^{n}\left[\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq i}}^{n}\frac{\omega1_{\Pi1_\mu}(x)}{\omega1_{\Pi1_\mu}(V_{ikl})}\right]\equiv 1,\ \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i\neq l}}^{m}\left[\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{m}\frac{\omega2_{\Pi2_\nu}(x)}{\omega2_{\Pi2_\nu}(V_{ikl})}\right]\equiv 1,\ \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k\neq i}}^{s}\left[\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq l}}^{s}\frac{\omega3_{\Pi3_\beta}(x)}{\omega3_{\Pi3_\beta}(V_{ikl})}\right]\equiv 1.$$

Лема доведена.

Теорема 4. Нехай томограми $T_k(\bar{x})\in C^r(R^2)$, $r\geq 3$ задовольняють умовам С.М. Нікольського на ребрах і в точці перетину площин. Тоді функція

$$L(x)=\sum_{(i,k,l)\in M} h_{ikl}(x)L_{ikl}(x)$$

є поліноміальним інтерфлетантом із властивостями

$$L(x)\in C^r(\Omega),\ L(x)\big|_{\Pi_s}=T_s(\bar{x}),\ s=\overline{1,N} \qquad (4)$$

При цьому $\forall f(x)\in C^r(\Omega)$, $r\geq 3$, що задовольняє умовам теореми 3, виконується рівність

$$L(x)=Lf(x),\ f(x)=Lf(x)+R\,f(x),\ R(x)f(x)=\sum_{(i,k,l)\in M} h_{ikl}(x)R_{ikl}f(x)$$

де $R_{ikl}f(x)$ визначається формулою (3), а $h_{ikl}(x)$ – допоміжні поліноми, що визначаються в теоремі 3.

Доведення. Згідно з формулою (2) при побудові операторів $L_{ikl}(x)$ використовуються функції $T_{1,i}(\bar{x}), T_{2,k}(\bar{x}), T_{3,l}(\bar{x}) \in C^r(R^2)$, $r \geq 3$.

Тому $L(x) \in C^r(R^3)$ або, якщо $\Omega \subset R^3$, то $L(x) \in C^r(\Omega)$. Доведення співвідношень (4) проводиться так (використовуються умови теореми 1 і те, що система функцій $h_{ikl}(x)$ є розкладом одиниці):

$$L(x)\big|_{\Pi_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{s} h_{ikl}(x)L_{ikl}(x)\Big|_{\Pi_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{s} h_{ikl}(x)\big|_{\Pi_i} L_{ikl}(x)\big|_{\Pi_i} = T_i(x)\big|_{\Pi_i}$$

Враховуючи, що $\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq k\neq l}}^{m} \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i\neq l}}^{n} \sum\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq k\neq i}}^{s} h_{ikl}(x) = 1$, формула $L_{ikl}f(x) + R_{ikl}f(x) = f(x)$, перепишеться наступним чином

$$f(x) = \sum_{i=1l}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{s} h_{ikl}(x)\left[L_{ikl}f(x) + R_{ikl}f(x)\right].$$

Звідси отримуємо

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s} h_{ikl}(x)L_{ikl}f(x) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s} h_{ikl}(x)R_{ikl}f(x) = \big(L(x) + R(x)\big)f(x).$$

Теорема 4 доведена.

Теорема 5. Абсолютна неусувна похибка E побудованого інтерфлетанта в припущені, що $f(x,y,z)$ на площинах Π_k, тобто відповідні томограми задані наближено δ_k, тобто

$$\left|T_k(\bar{x}) - \tilde{T}_k(\bar{x})\right| \leq \delta_k \; k = \overline{1,n},$$

а також $\left|T_k(\bar{x})\big|_{\Pi_i} - \tilde{T}_k(\bar{x})\big|_{\Pi_i}\right| \leq \delta_{ki}$, $k = \overline{1,n},\; l = \overline{1,m}$,

$$\left|T_k(\bar{x})\big|_{\omega_i(x)=0,\,\omega_l(x)=0} - \tilde{T}_k(\bar{x})\big|_{\omega_i(x)=0,\,\omega_l(x)=0}\right| \leq \delta_{kil},.$$

дорівнює

$$E \leq \sum_{(i,k,l)\in M} \delta_i + \delta_k + \delta_l + \delta_i\delta_k + \delta_i\delta_l + \delta_k\delta_l + \delta_i\delta_k\delta_l.$$

Тестовий приклад відновлення функції трьох змінних за допомогою оператора інтерфлетації за відомими її слідами на системі довільно розташованих площин

За викладеною методикою був розроблений комплекс програм у системі комп'ютерної математики *MathCad*. Результати її тестування демонструють високу точність.

Продемонструємо результати роботи програми.

Нехай задані 4 площини $\Pi_k : \omega_k(x) = 0$ у вигляді

$$\omega_1 = \frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}},\; \omega_2 = \frac{-x+y+z-1}{\sqrt{3}},\; \omega_3 = \frac{x-y+z-1}{\sqrt{3}},\; \omega_4 = \frac{-x-y+z-4}{\sqrt{3}},$$

які перетинаються в чотирьох точках:

$$V_{123}=(0,0,1),\ V_{124}=(0,-1.5,2.5),\ V_{134}=(-1.5,0,2.5),\ V_{234}=(-1.5,-1.5,1).$$

Як бачимо, в одній точці не перетинається більше трьох площин.

Про функцію $F(x)=x_1^2+10x_2+5x_3$ відомі її сліди на заданих площинах, тобто томограми

$$\mathrm{T}_1(\bar{x})=F(x)\big|_{\omega_1(x)=0}=x_1^2-5x_1+5x_2+5,$$
$$\mathrm{T}_2(\bar{x})=F(x)\big|_{\omega_2(x)=0}=x_1^2-5x_1+15x_2+5,$$
$$\mathrm{T}_3(\bar{x})=F(x)\big|_{\omega_3(x)=0}=x_1^2+5x_1+5x_2+5,$$
$$\mathrm{T}_4(\bar{x})=F(x)\big|_{\omega_4(x)=0}=x_1^2+5x_1+15x_2+5.$$

За теоремою 4 був побудований оператор інтерфлетації, який використовує лише задані томограми та рівняння площин, на яких лежать томограми. Після спрощення побудований оператор набуває вигляду

$$L(x)=x_1^2+10x_2+5x_3$$

Висновок

З тестового прикладу робимо висновок, що побудований оператор інтерфлетації за відомими томограмами (слідами) на системі довільно розташованих площин точно відновив квадратичну функцію, чого не можливо досягнути за допомогою операторів інтерполяції, які використовуються в сучасних методах комп'ютерної томографії.

Викладений метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою операторів інтерфлетації у випадку відомих томограм, що лежать на системі будь-яких площин, є узагальненням розробленого авторами методу відновлення за відомими томограмами на системі трьох груп перерізаних площин і має таку ж високу точність.

Література

1. Наттерер Ф. "Математические аспекты компьютерной томографи" Пер. с англ. М.: Мир, 1990.- 279 с.
2. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографи. Пер. с англ.– М.: Мир, 1983. – 350 с.
3. Хелгасон С. Преобразование Радона: Пер. с англ. - М: Мир, 1983. – 152 с.
4. Сергієнко І.В. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетації функцій / І.В. Сергієнко, О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Монографія. – Харків, 2008.–160с.
5. Литвин О.М. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетації функцій/О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Доповіді НАНУ. – 2005. – №1. - С. 20-24.
6. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544с.
7. Likhachev A.V., Pickalov V.V. A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography // Computational Mathematics and Mathematical Physics.–2002.–Vol. 42, № 3.–P.341–352.
8. Трофимов О.Е., Тюренкова Л.В. Об одном способе восстановления изображения по многоракурсной томограмме / Новосибирск, 1989. – 28с. (Препр./ ИАиЭ СО АН СССР;440).
9. Пикалов В.В., Лихачев А.В. Сравнение алгоритмов спиральной томографии // Вычислительные методы и программирование. – 2004. –№5. – С. 170 – 183.
10. Никольский С.М.. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками // Математический сборник. – 1958. – Т.45(87), №2. – С. 181 – 194.

Literatura

1. Natterer F. ”Matematicheskie aspektyi kompyuternoy tomografi” Per. s angl. M.: Mir, 1990.- 279 p.
2. Hermen G. Recovery images from projections: the foundations reconstructive tomography. Trans. with angl.- M .: Mir, 1983. - 350 p.
3. Helgason S. Radon transform: Trans. from English. - M: Mir, 1983. - 152.
4. Sergienko I.V .Mathematical modeling in computer tomography using interflatation functions / I.V. Sergienko, O.M. Lytvyn, Y.I. Pershynf // Monograph. - Kharkiv, 2008.-160p.
5. Lytvyn AM .. Mathematical model of restoration of the internal structure of three-dimensional object known for its tomograms using interflatation functions / O.M. Lytvyn, Y.I. Pershynf // Reports National Academy of Sciences. -2005. - №1. - P. 20-24.
6. Lytvyn O.M. Interlination functions and some of its applications. - H .: Basis, 2002. - 544p.
7. Likhachev A.V., Pickalov V.V. A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography // Computational Mathematics and Mathematical Physics.–2002.–Vol. 42, № 3.–P.341–352.
8. Trofimov OE, Tyurenkova LV A method of image reconstruction for multi-angle tomogamme / Novosibirsk, 1989. - 28c. (Preprint. / IAE SB RAS; 440).
9. Pikalov VV, AV Likhachev Comparison of algorithms spiral tomography // Computational Methods and Programming. - 2004. -№5. - S. 170 - 183.
10. Nicholskiy SM .. Boundary properties of functions defined on a region with angular points // Mathematical Collection. - 1958 - T.45 (87), №2. - S. 181 - 194.

RESUME

Y.I. Pershyna,O.V. Shilin,V. O.Pasichnik

Solving the problem of 3D computer tomography for the known and its system of arbitrary tomograms on planes

This article is constructed and investigated mathematical model of two-dimensional computed tomography using interflatation functions of three variables known tomograms studied body. It is believed that tomograms are given on a system of arbitrary planes (at one point intersects at most three planes). The article presents the concept of tomography in the mathematical sense, as the trace of a function of three variables in the given plane and the algorithm of translation tomography image as a function, the arguments of which is the number of the figure and the coordinates of pixels. This gives the opportunity to work with tomograms as functions, i.e allowing for figure number to obtain its image and highlight color component at the specified point of drawing.

We construct and study the operator interflatation function of three variables known the following functions on a system of arbitrary planes. We prove a theorem on the general form of error approximation of a function of three variables constructed interflatation operator in integral form. Also give an estimate unrecoverable error experimental data. Demonstrated a test case for the construction of the operator interflatation quadratic function, and it has been shown that the constructed structure brings exactly this function, which is not the classic interpolation operators.

The proposed method essentially differs from the existing ones, that it can be carried out processing tomograms that do not lie in parallel planes (e.g., in the simplest case, the tomogram may be arranged system of three groups of planes parallel to the coordinate planes). The method makes it possible to solve the problem of three-dimensional computed tomography for a fundamentally new schemes for data collection. For example, it permits the use of fan-collection schemes of information in each of the planes in which lie the tomogram.

Ю.І.Першина,О.В. Шилін,В.А. Пасічник

Розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії за відомими томограмами на системі довільних площин

У даній статті побудовано і досліджено математичну модель двовимірної комп'ютерної томографії з використанням інтерфлетації функцій трьох змінних за відомими томограмами досліджуваного тіла. Вважається, що томограми лежать на системі заданих довільних площин (в одній точці перетинається не більше трьох площин). У статті дається поняття томограми в математичному сенсі як слід від функції трьох змінних на заданій площині і побудований алгоритм переводу зображення томограми у функціональну залежність, аргументами якої є номер малюнка і координати пікселів. Це дає можливість працювати з томограмами, як з функціями, тобто дозволяє за номером малюнка отримувати його зображення і виділяти компоненту кольору в зазначеній точці малюнка.

У роботі будується і досліджується оператор інтерфлетації функції трьох змінних за відомими слідами функції на системі довільних площин. Доводиться теорема про загальний вигляд похибки наближення функції трьох змінних, побудованих оператором інтерфлетації в інтегральному вигляді. Також приведена оцінка неусувної похибки експериментальних даних. Продемонстровано тестовий приклад побудови оператора інтерфлетації для квадратичної функції, і показано, що побудована конструкція наближає цю функцію точно, чого не можна сказати про класичні оператори інтерполяції.

Запропонований метод істотно відрізняється від існуючих тим, що в ньому може проводитися обробка томограм, що не лежать в паралельних площинах (наприклад, у найпростішому випадку томограми можуть розташовуватися у системі трьох груп площин, паралельних координатним площинам). Метод дає можливість вирішувати тривимірну задачу комп'ютерної томографії для принципово нової схеми збору даних. Наприклад, він допускає використання віяльної схеми збору інформації в кожній з площин, в яких лежать томограми.

Надійшла до редакції 01.09.2015